BAHAN AJAR

PERSAMAAAN DIFERENSIAL

BAGIAN I

Oleh:

Drs. Rochmad, M.Si

Jurusan Matematika
FMIPA UNNES
Semarang

BAB 1
PERSAMAAN DIFERENSIAL DAN PENYELESAIANNYA

Dewasa ini ilmu pengetahuan, teknologi dan seni (ipteks) berkembang dengan pesat. Misalnya sistem transportasi, komunikasi, dan informasi tumbuh dan bekembang dengan cepat. Di awal millenium ke-3 ini, era globalisasi dan pasar bebas dunia dimulai. Dengan didukung peralatan modern jaringan internet dan telekomunikasi canggih lainnya informasi dengan bebas menembus batas antar negara dan orang mulai memandang dunia sebagai satu kesatuan. Kerja sistem komunikasi modern tak mengenal batas wilayah sehingga peristiwa di suatu tempat dalam waktu relatif singkat beritanya segera menyebar menembus seluruh penjuru dunia. Kemajuan di bidang teknologi transportasi menjadikan jarak antar dua dua tempat terasa “dekat”, dan kecepatan serta ketepatan waktu transportasi menjadikan mobilitas kegiatan manusia lebih tinggi.

Terpaksa ataupun tidak dalam kehidupan kini dan mendatang manusia senantiasa berhadapan dan bersentuhan dengan ipteks. Dalam rangka menyesuaikan diri dengan kemajuan jaman orang merasa perlu meningkatkan pengetahuannya yang berkaitan dengan kemajuan ipteks. Manusia dalam menjalani kehidupan sehari-hari termasuk dalam menghadapi dunia kerjanya memerlukan bukan saja pengetahuan yang memadai tetapi juga dituntut memiliki kemampuan beradaptasi mengikuti perkembangan kemajuan ipteks itu sendiri.

Saat ini tuntutan terhadap penguasaan matematika terapan (*applied mathematics*) semakin kuat. Kerja efektif, praktis dan akurat diperlukan baik untuk menjalani kehidupan saat ini (sebagai mahasiswa) maupun nanti bila memasuki dunia kerja. Matematika terapan diperlukan orang khususnya dalam membantu memecahkan masalah-masalah yang berkaitan dengan perkembangan ipteks. Banyak masalah matematik dapat disajikan dalam bentuk model matematika (*mathematical model*). Oleh karena itu, khususnya bagi mahasiswa yang mengambil jurusan matematika, IPA dan Teknik perlu pengetahuan dasar bagaimana cara mencari solusi suatu model matematika.

Para mahasiswa sudah saatnya memperhatikan pendayagunaan matematika terapan yang berkaitan dengan pemodelan matematika. Dasar-dasar matematika dan sain (*mathematics and sciences*) yang mengarah pada pemecahan masalah sehari-hari perlu dipelajari dan dikuasai sedini mungkin oleh mahasiswa, agar nanti pada saat memasuki dunia kerja mereka dapat beradaptasi dengan ipteks yang diprediksi jauh lebih maju dari saat ini. Bagi mahasiswa, mata kuliah persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation)* merupakan mata kuliah yang dapat mengantarkan ke pemikiran-pemikiran menerapkan matematika baik secara konseptual untuk memecahkan masalah gejala alam maupun secara praktis untuk mengembangkan ipteks.

Mahasiswa yang ingin mendalami masalah pemodelan matematika diharapkan mempelajari konsep-konsep dasar materi ilmu lainnya. Salah satu upaya agar para mahasiswa menyadari bahwa matematika memiliki daya guna dalam kehidupan sehari-hari adalah pertama-tama dengan mengamati gejala atau fenomena alam yang kemudian secara matematik dicari modelnya dalam bentuk persamaan diferensial. Bagi mahasiswa masalah pemodelan matematika ini termasuk materi yang sulit dipahami apalagi bila mahasiswa dituntut mencari atau mengembangkan model matematika baru, sebab pada umumnya penguasaan mahasiswa terhadap konsep bidang ilmu lainnya umumnya pada tingkatan rendah. Oleh karena itu, mahasiswa diharapkan mempelajari konsep dasar bidang ilmu lainnya yang berkaitan dengan masalah yang dihadapinya.

Salah satu cara mempelajari persamaan diferensial dalam rangka memahami peran matematika dibidang ipteks adalah dengan mempelajari contoh-contoh penerapan matematika yang sudah ada (*literature study*). Di awal ketika mempelajari persamaan diferensial mahasiswa diharapkan lebih menekankan pada penguasaan konsep dasar matematik dan keterampilan mencari solusi persamaan diferensial. Karena terdapat banyak bentuk persamaan diferensial, maka dalam mencari solusi ini umumnya melibatkan berbagai teknik mencari solusi persamaan diferensial. Oleh karena itu, mahasiswa perlu menguasai dan memahami berbagai teknik mencari solusi persamaan diferensial. Selanjutnya mahasiswa diharapkan dapat memfokuskan pada penguasaan konsep-konsep yang melatarbelakangi munculnya model matematika dalam bentuk persamaan diferensial. Di samping itu, agar mahasiswa dapat memahami sifat solusi suatu persamaan diferensial dengan lebih baik dapat digunakan komputer sebagai alat bantu dalam mencari solusi maupun menggambar grafik solusinya.

a. Pengertian Persamaan Diferensial

Dalam mata kuliah kalkulus dipelajari bagaimana cara mencari turunan fungsi y = f(x), yakni

$$\frac{dy}{dx} = y' = f'(x).$$

Misalnya $y = \cos 2x + 7e^{-x}$, maka turunannya adalah

$$\frac{dy}{dx} = -2 \sin 2x - 7e^{-x}. \qquad (1.1)$$

Atau bila diberikan suatu persamaan berbentuk h(x,y) = konstan, maka dapat diturunkan secara implisit untuk memperoleh $\frac{dy}{dx}$, misalnya $x^2 + y^2 = 16$ dapat diturunlan secara implisit menjadi

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0, \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -\frac{-x}{y}. \qquad (1.2)$$

Persamaan (1.1) dan (1.2) memuat suatu fungsi dan turunannya merupakan contoh-contoh persamaan diferensial.

b. Definisi (persamaan diferensial)

Persamaan diferensial adalah suatu persamaan yang memuat turunan terhadap satu atau lebih dari variabel-variabel bebas (*independent variables*). Bila hanya ada satu variabel bebas yang diasumsikan, maka subyek disebut persamaan diferensial biasa (*ordinary differential equation*). Kedua contoh (1.1) dan (1.2) adalah contoh persamaan diferensial biasa. Contoh lain persamaan diferensial biasa sebagai berikut.

1. $\frac{dy}{dx} = 2x + 10.$
2. $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0.$
3. x dy + y dx = 4 dx.
4. $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x.$
5. $(y'')^2 + (y')^3 + 3y = x^2.$

Jika pada persamaan diferensial ada dua atau lebih variabel bebas dan memuat turunan parsial maka dinamakan persamaan diferensial parsial (*partial differential equation*). Sebagai contoh:

6. $\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} + 2z = 0.$

7. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 + y^2.$

Untuk selanjutnya tulisan ini hanya membahas persamaan diferensial biasa.

c. Notasi, orde dan derajat

Bentuk umum persamaan diferensial linear sebagai berikut:

$$F[x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^ny}{dx^n}] = 0. \qquad (1.3)$$

dengan F adalah suatu fungsi real dalam (n + 2) argumen-argumen x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, …, $\frac{d^ny}{dx^n}$. Notasi (1.3) menyatakan hubungan antara variabel bebas x dan variabel terikat (*dependent variable*) y dan berbagai variasi turunan-turunannya. Persamaan diferensial linear (*linear differential equation*) dalam variabel bebas x dan variabel terikat y sering ditulis dalam bentuk

$$a_o(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx} + a_n(x)y = b(x). \qquad (1.4)$$

Persamaan diferensial tak linear (*non linear differential equation*) adalah persamaan diferensial yang tidak linear. Sebagai contoh

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

merupakan persamaan diferensial linear dan

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 0$$

merupakan persamaan diferensial tak linear.

Orde persamaan diferensial adalah tingkat dari turunan tertinggi yang termuat dalam persamaan tersebut. Persamaan diferensial (1.3) dan (1.4) adalah persamaan diferensial orde-n sebab turunan tertinggi yang terlibat dalam persamaan (1.3) dan (1.4) adalah turunan ke-n, contoh lain: persamaan diferensial pada contoh 1, 3 dan 6 orde satu (orde-1); 2, 5, dan 7 orde-2, dan 4 orde-3.

Derajat atau pangkat atau tingkat persamaan diferensial adalah pangkat tertinggi dari turunan tertinggi pada persamaan diferensial tersebut. Persamaan diferensial pada notasi umum (1.4) berderajat-1. Contoh lain: persamaan diferensial pada Contoh 1, 2, 3, dan 4 berderajat satu (berderajat-1) dan Contoh 5 berderajat-2. .

Di samping itu, persamaan diferensial ada yang disebut homogen (*homogeneous*) dan tak homogen (*non homogeneous*). Pada persamaan (1.4) bila b(x) = 0 merupakan persamaan diferensial linear homogen dan bila b(x) $\neq$ 0 merupakan persamaan diferensial linear tak homogen. Persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0$$

adalah persamaan diferensial linear orde-1 homogen dan

$$\frac{dy}{dt} + a(t)y = b(t),\ b(t) \neq 0,$$

adalah persamaan diferensial linear orde-1 tak homogen. Contoh lain: pada Contoh 2 adalah persamaan diferensial homogen dan Contoh 1, 3, 4, dan 5 adalah tak homogen.

Kepentingan utama mempelajari persamaan diferensial adalah mencari penyelesaian atau solusi persamaan diferensial tersebut. Apa makna solusi persamaan diferensial? Pada dasarnya suatu solusi persamaan diferensial adalah suatu fungsi yang memenuhi persamaan diferensial tersebut.

d. Definisi (solusi persamaan diferensial)

Perhatikan persamaan diferensial orde-n dalam bentuk (1.3). Suatu fungsi real f yang didefinisikan pada semua x dalam interval real I dan memiliki suatu turunan ke-n (dan juga semua turunan tingkat lebih rendah) untuk semua x $\in$ I. Fungsi f disebut solusi (1.3) pada I jika memenuhi dua syarat:

$$F[x, y, f(x), f'(x), f''(x) \ldots, f^{(n)}(x)]$$

terdefinisi untuk semua x $\in$ I, dan

$$F[x, y, f(x), f'(x), f''(x) \ldots, f^{(n)}(x)] = 0$$

untuk semua $x \in I$. Yakni, subtitusi f(x) dan berbagai turunannya untuk y dan berturut-turut turunan-turunan yang berkaitan menghasilkan (1.3) pada suatu kesamaan (*identity*) pada interval I.

Contoh:

a. Fungsi $y = A\,e^{x} + B\,e^{2x}$ dengan A, B konstan adalah solusi persamaan diferensial $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$ pada interval $-\infty < x < +\infty$.

b. Untuk sebarang konstan c fungsi $y = ce^{x/2}$ adalah solusi persamaan diferensial dy = ½y dx pada interval $-\infty < x < +\infty$.

c. $x^2 + y^2 = C$ untuk sebarang konstan C > 0 adalah solusi dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$. Pada contoh ini variabel terikat y menyatakan fungsi (implisit) dari variabel bebas x dalam persamaan $x^2 + y^2 = C$. (Meskipun penulisan y secara ekplisit dalam x disarankan, namun kadang sulit dilakukan. Oleh karena itu solusi sering ditulis secara implisit).

e. Solusi umum dan solusi khusus

Solusi umum (*general solution*) persamaan diferensial orde-n adalah solusi (baik dinyatakan secara eksplisit maupun implisit) yang memuat semua solusi yang mungkin pada suatu interval. Pada umumnya solusi umum persamaan diferensial biasa orde-n memuat n konstan. Suatu solusi persamaan diferensial disebut solusi khusus (*particular solution*) jika solusi tersebut bebas dari sebarang konstan.

Contoh:

Dengan cara mengintegralkan, persamaan diferensial y' = 2x + 3 menghasilkan solusi

$$y = x^2 + 3x + C$$

Di sini, konstan C adalah sebarang bilangan real. Fungsi $y = x^2 + 3x + C$ adalah solusi umum persamaan diferensial y' = 2x + 3. Setiap solusi khusus persamaan diferensial y' = 2x + 3 diperoleh dari $y = x^2 + 3x + C$ dengan mengganti nilai C dengan konstanta tertentu. Misalnya untuk C = 0, diperoleh solusi khusus $y = x^2 + 3x$ dan untuk C = 19 diperoleh solusi khusus $y = x^2 + 3x + 19$.

Soal

1. Tentukan orde dan derajat persamaan diferensial berikut:
   a. $dy + (xy - \cos x)\, dx = 0$
   b. $dy = (x^2 - y)\, dx$
   c. $L \dfrac{d^2 i}{dt^2} + R \dfrac{di}{dt} + \dfrac{i}{C} = 0$
   d. $y''' + xy'' + 2y(y')^2 + xy = 0$
   e. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} + x \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + y = 0$
   f. $\left(\dfrac{d^3 s}{dt^3}\right)^2 - \left(\dfrac{d^2 s}{dt^2}\right)^4 + st = 0$
   g. $y' + x = (y - xy')^{-5}$
   h. $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \sqrt[4]{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x}$
2. Periksalah apakah fungsi berikut solusi persamaan diferensial yang diberikan:
   a. $y = e^{-x} + C e^{-2x}$, $\dfrac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$
   b. $y = 3x^{-2} + C x^{-4}$, $(4x^2 y - 6)\, dx + x^3\, dy = 0$.
   c. $e^y - e^x = C$, $\dfrac{dy}{dx} = e^{x-y}$.
3. Tunjukkan bahwa $y = Cx^2 + C^2$, dengan C konstanta sebarang adalah solusi umum persamaan diferensial $(y')^2 + 2x^3 y' - 4x^2 y = 0$.
4. Tunjukkan bahwa $2y = 2x - x^{-2}$ adalah solusi khusus persamaan diferensial $x^3\, dy - x^3\, dx = dx$.
5. Tunjukkan bahwa $y = (5x + C)e^{-2x}$, dengan C konstanta sebarang adalah solusi umum persamaan diferensial $y' + 2y = 5e^{-2x}$.
6. Apakah $x^2 y + xy + 1 = 0$ merupakan solusi khusus persamaan diferensial $x\, dy + y\, dx = x^2 y^2\, dx$?

f. Menyusun Persamaan Diferensial

Dalam mempelajari matematika terapan sering dijumpai model matematika yang berkaitan dengan persamaan diferensial. Misalnya dalam topik turunan suatu fungsi secara langsung sering diperoleh persamaan diferensial. Dalam menyelesaikan masalah kehidupan sehari-hari sering dijumpai model matematika yang berkaitan dengan persamaan diferensial. Berikut ini disajikan beberapa contoh persamaan diferensial.

1. Menyusun persamaan diferensial jika diketahui primitifnya

Dalam kalkulus terdapat topik turunan suatu fungsi kontinu, misalnya bila diketahui $y = f(x) = x^2 + 6x + 5$, maka turunannya adalah $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x + 6$ dan $\frac{dy}{dx} = 2x + 6$ merupakan bentuk persamaan diferensial linear orde-1. Fungsi $y = x^2 + 6x + C$, dengan C konstan sebarang merupakan primitif dari persamaan diferensial $\frac{dy}{dx} = 2x + 6$. Sekarang sebaliknya, jika diketahui turunan suatu fungsi $\frac{dy}{dx} = f'(x) = 2x + 6$ dapatkah dicari fungsi primitifnya, yakni $y = f(x)$? Permasalahan seperti ini sering muncul dalam matematika khususnya yang berkaitan dengan terapan matematika. Pada dasarnya fungsi primitif $y = f(x)$ adalah suatu fungsi yang turunannya adalah $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$. Cara mencari f(x) ini dapat dilakukan dengan mengintegralkan f'(x) terhadap x.

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int (2x + 6)\,dx = x^2 + 6x + C \text{ (C konstan sebarang).}$$

Jadi $y = f(x) = x^2 + 6x + C$ adalah primitif dari $y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$ sebab

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 6x + C) = 2x + 6.$$

Karena C konstan sebarang maka primitif f(x) tidak tunggal. Bila diketahui kondisi awal (*initial value*), misalnya $f(0) = 5$, maka $C = 5$, diperoleh $f(x) = x^2 + 6x + 5$ yang merupakan primitif khusus dari f'(x).

Bila y = f(x) dan $\frac{dy}{dx}$ = f'(x), maka y = x^2 + 6x + C adalah primitif persaman diferensial $\frac{dy}{dx}$ = 2x + 6 atau dy = (2x + 6) dx. Dengan demikian primitif y = f(x) tidak lain adalah solusi persamaan diferensial $\frac{dy}{dx}$ = f'(x). Dan salah satu cara mencari primitif persamaan diferensial $\frac{dy}{dx}$ = f'(x) dengan mengintegalkan f'(x) terhadap x. Bila suatu persamaan diferensial dengan kondisi awalnya diketahui, maka orang dapat mencari solusi khususnya. Masalah seperti ini dinamakan masalah nilai awal (*initial value problem*).

Contoh:

a. Carilah primitif dari $\frac{dy}{dx} = 6x^2 + \cos x$

   Jawab: y = $\int (6x^2 + \cos x)\, dx = 2x^3 + \sin x + C$, C konstan sebarang.

b. Carilah primitif dari f'(x) = 2x + 3 sin x + 2 cos x yang melalui titik (0,5).

   Jawab: y = $\int (2x + 3 \sin x + 2 \cos x)\, dx = x^2 - 3 \cos x + 2 \sin x + C$, C konstan sebarang. Karena primitif melalui (0,5), maka untuk x = 0, nilai y = 0 – 3.1 + 2. 0 + C = 5. Diperoleh C = 8. Jadi primitif yang ditanyakan adalah y = $x^2 - 3 \cos x + 2 \sin x + 8$.

Sebaliknya bila diketahui primitif dari suatu persamaan diferensial orang dapat mencari persamaan diferensialnya.

Contoh:

a. Carilah persamaan diferensial jika primitifnya y = C sin x, C konstan sebarang.

   Jawab:

   Untuk menjawab permasalahan ini pertama-tama dicari turunan dari y, yakni y' = C cos x. Jadi C = $\frac{y'}{\cos x}$. Jadi y = $\frac{y'}{\cos x}$ sin x = y' tg x, atau y' = y ctg x.

b. Carilah persamaan diferensial jika primitifnya $\ln y = A x^2 + B$, dengan A dan B konstan sebarang.

Jawab:

$$\frac{1}{y} y' = 2Ax$$

$$y' = 2Axy \quad \text{jika dan hanya jika } 2A = \frac{y'}{xy}$$

$$y'' = 2Ay + 2Axy' = 2A(y + xy') = \frac{y'}{xy}(y + xy')$$

Jadi diperoleh $xyy'' - yy' - x(y')^2 = 0$.

c. Carilah persamaan diferensial yang primitifnya $x^2y^3 + x^3y^5 = C$, C konstan sebarang.

Jawab:

$$(2xy^3 + 3x^2y^2 \frac{dy}{dx}) + (3x^2y^5 + 5x^3y^4 \frac{dy}{dx}) = 0,$$

atau

$$(2xy^3\,dx + 3x^2y^2\,dy) + (3x^2y^5\,dx + 5x^3y^4\,dy) = 0.$$

2. Menyusun model persamaan gerak benda

Dalam kehidupan sehari-hari orang sering berhadapan dengan permasalahan matematik yang melibatkan hubungan suatu fungsi dengan turunannya atau dengan perkataan lain orang sering berhadapan dengan permasalahan mencari solusi suatu persamaan diferensial. Dalam fisika, jarak benda yang ditempuh benda bergerak merupakan fungsi waktu, kecepatan adalah turunan dari jarak, dan percepatan adalah turunan dari kecepatan.

Sebagai contoh, misalkan s(t) adalah jarak yang ditempuh oleh benda bergerak selama t detik dan ditentukan oleh rumus

$$s(t) = 4t^3 + 2t^2 + 3t + 6,$$

bagaimanakah persamaan diferensial kecepatan sesaat dan percepatannya? Permasalahan matematik ini berkaitan dengan fisika. Kecepatan sesaatnya adalah persamaan diferensial

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 12t^2 + 4t + 3$$

dan percepatannya

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2} = 24t + 4.$$

3. Keradioaktifan suatu zat: menyusun model peluruhan

Dua besaran P dan Q dikatakan proporsional (*proportionality*). jika besaran yang satu kelipatan konstan lainnya, yakni P = kQ untuk suatu konstan k. Contoh permasalahan matematik berkaitan dengan fenomena alam dalam kehidupan sehari-hari berkaitan dengan keproporsionalan ini misalnya masalah keradioaktifan suatu zat. Ahli Fisika Ingris Lord Ernest Rutherford (1871-1937) menyatakan bahwa keradioaktifan adalah sifat suatu atom. Rutherford dan koleganya (Madam Curie dan Henri Becquerel) menunjukkan bahwa atom-atom unsur radioaktif tertentu tidak stabil dan dalam periode waktu tertentu sebagian atom-atom luruh dan membentuk atom-atom unsur baru. Rutherford menunjukkan bahwa keradioaktifan suatu zat berbanding langsung dengan banyaknya atom pada waktu itu.

Misalnya pada waktu t terdapat N atom dalam suatu zat radioaktif. Maka banyaknya atom yang tak luruh yaitu sebesar ΔN selama waktu dari t sampai t + Δt haruslah berbanding langsung dengan hasil kali N dan Δt, yakni

$$\Delta N = -kN\Delta t \qquad (1.5)$$

dengan k > 0 adalah koefisien keproporsionalan (sebagai contoh untuk radium k $\approx 1.4.10^{-11}$ $\det^{-1}$), disebut konstan peluruhan (*decay constan*). Asumsikan banyaknya atom yang tak luruh merupakan fungsi dalam t , yakni N = N(t). Dengan membagi persamaan (1.5) dengan Δt dan mengambil $\Delta t \to 0$, menghasilkan model persamaan diferensial

$$\frac{dN}{dt} = -kN.$$

Masih banyak permasalahan yang dapat disusun model matematiknya. Contoh di atas merupakan contoh memperoleh atau menyusun model matematika dalam bentuk persamaan diferensial biasa. Dengan ungkapan lain orang memperoleh suatu persamaan diferensial sebagai model matematik permasalahan yang muncul dalam kehidupan sehari-hari. Berdasar model matematik yang telah diperoleh ini selanjutnya dicari solusinya.

Soal

1. Carilah primitif dari persamaan diferensial berikut.
   a. $f'(x) = 4x + x^{-2}$
   b. $f'(x) = \sqrt{(4x+9)}$ yang melalui (4, 10)
   c. $f'(x) = 4e^{x} + \cos x$ yang melalui (0,2)
2. Carilah persamaan diferensial yang primitifnya di bawah ini.
   a. y = Ax, A konstan sebarang
   b. y = AX + B, A dan B konstan sebarang
   c. $y = e^{x+A}$, A konstan sebarang
   d. y = A cos x, A kosntan sebarang
   e. y = sin (x + A), A konstan sebarang
   f. $y = Ae^{x} + B$, A dan B konstan sebarang
3. Carilah persamaan diferensial dari permasalahan matematik berikut ini.
   a. Diketahui suatu kurva dibidang-xy, koefisien arah (gradien) garis singgung kurva tersebut di setiap titik (x,y) sama dengan 5 kali jumlah absis dan ordinatnya. Tentukan persamaan diferensialnya.
   b. Suatu parabola ditentukan oleh rumus $y^{2} = 4px + q$ dengan p dan q suatu konstan (parameter). Tentukan persamaan diferensial orde-2 dari berkas parabola ini.
   c. Carilah persamaan diferensial suatu berkas lingkaran berjari-jari r dengan pusat (0,0).
   d. Suatu kurva ditentukan oleh kondisi bahwa jumlah antara perpotongan garis singgung (garis tangen) dengan sumbu-x dan perpotongan garis singgung dengan sumbu-y selalu sama dengan 2. Carilah persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah ini.
   e. Kecepatan berkembang biak suatu bakteri per unit kubik berbanding lurus dengan jumlah bakteri yang ada di dalam unit kubik tersebut. Tentukan persamaan diferensial yang menyatakan hubungan antara waktu t dan dengan jumlah bakteri tersebut.
4. Tentukan persamaan diferensial dari suatu parabola yang persamaannya berbentuk $y^{2} = 4px$.

5. Sebuah benda bergerak dipercepat beraturan dengan percepatan 12 m/det^2. Benda mulai bergerak dari tempat P dengan kecepatan 10 m/det. Tentukan jarak benda dari P setelah benda bergerak selama 7 detik.
6. Sebuah benda jatuh dari suatu gedung yang tinggi. Awal ketika jatuh kecepatannya nol. Carilah persamaan diferensial yang berkaitan dengan kecepatan gerak benda ini. Bagaimanakah rumus kecepatannya?
7. Sejumlah bakteri dimasukkan ke dalam tabung percobaan. Mula-mula diperkirakan ada 100.000 bakteri. Jumlah bakteri pada sebarang waktu t bertambah dan berbanding langsung dengan banyaknya bakteri pada waktu itu. Bila faktor pembandingnya 2, bagaimanakah persamaan diferensialnya? Dapatkah Saudara mencari solusinya? Bila t = 3, berapa jumlah bakterinya?
8. Modal sebesar P rupiah diinvestasikan pada suatu perusahaan selama t tahun. Modal berkembang dengan laju berbanding langsung dengan banyaknya uang saat itu. Bila faktor pembandingnya r, carilah persamaan diferensial yang berkaitan dengan masalah ini. Dapatkah Saudara mencari rumus perkembangan uang ini setelah t tahun?

BAB 2

TEKNIK MENCARI PENYELESAIAN PERSAMAAN DIFERENSIAL

a. Persamaan Diferensial dengan Variabel Terpisah

Misalkan suatu benda dijatuhkan dari gedung yang cukup tinggi dengan kecepatan awal $v(0) = 0$. Seseorang ingin mengetahui kecepatan benda pada setiap saat $t > 0$. Apabila semua hambatan diabaikan, menurut hukum Newton kedua

$$m\frac{dv}{dt} = mg \qquad (2.1)$$

dengan m dan g berturut-turut massa benda dan percepatan (grafitasi). Pada formula (2.1) jarak positif diukur dari atas gedung ke bawah. Dengan cara mengintegralkan diperoleh

$$v = gt + C, \text{ C konstan sebarang}$$

Dengan memanfaatkan kondisi awal kecepatan benda $v(0) = 0$, diperoleh nilai C

$$v(0) = 0.g + C$$

$$C = 0.$$

Jadi solusi umum $v = gt$ adalah kecepatan gerak suatu benda jatuh dengan kecepatan awal nol bila hanya gaya grafitasi yang mempengaruhinya.

Peristiwa benda jatuh dari suatu ketinggian dengan formula (2.1) sebagai contoh sederhana yang mengilustrasikan dua sifat pokok yang melekat pada persamaan diferensial orde-1. Pertama proses pengintegralan diperlukan untuk memperoleh v dari turunannya v’, dan kedua proses pengintegralan menghasilkan sebuah konstan integrasi sebarang yang selanjutnya dapat dicari nilainya bila kondisi awalnya diketahui (masalah nilai awal).

Persamaan diferensial berbentuk

$$y' = f(x),$$

dengan f suatu fungsi kontinu pada suatu interval real, dapat dicari penyelesaiannya dengan cara mengintegralkan ke dua ruas. Akan tetapi perhatikan bila persamaan diferensial berbentuk

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y), \qquad (2.2)$$

yang turunannya adalah suatu fungsi dalam dua variabel x dan y. Untuk mencari penyelesaian (2.2) kadang tidak mudah. Bila f(x,y) dapat difaktorkan ke faktor-faktor yang hanya memuat x atau y, yakni

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) = p(x)\, q(y),$$

atau

$$\frac{dy}{q(y)} = p(x)\, dx, \qquad (2.3)$$

maka persamaan diferensial (2.3) ini merupakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Untuk mencari solusi persamaan diferensial (2.3) dapat dengan cara mengintegralkan kedua ruas (terhadap variabel yang sama yakni x). Pengintegralan seperti ini dapat dilakukan sebab diasumsikan y sebagai fungsi dari x. Ruas kiri persamaan diferensial (2.3):

$$\frac{dy}{q(y)} = \frac{y'(x)}{q(y(x))}\, dx,$$

sehingga diperoleh

$$\frac{y'(x)}{q(y(x))}\, dx = p(x)\, dx.$$

Selanjutnya bila dimisalkan u = y(x) dan du = y'(x) dx,maka dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan menghasilkan solusi

$$\int \frac{du}{q(u)} = \int p(x)\, dx + C, \text{ C konstan sebarang.}$$

Selanjutnya subtitusikan kembali u = y(x) diperoleh solusi umum (2.3).

Dalam beberapa kasus persamaan diferensial muncul dalam bentuk

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0,$$

misalnya

a. $ye^{-x}\, dy + x\, dx = 0$.

b. $\sec x\, dy - x \cot y\, dx = 0$.

c. $(xe^{x} - e^{2y})\, dy + (e^{y} + x)\, dx = 0$.

Persamaan diferensial pada Contoh a dan b dapat diubah dalam bentuk variabel terpisah sedangkan c tidak dapat.

Persamaan diferensial biasa orde-1 derajat-1 sering dapat dinyatakan dalam bentuk

$$M(x)\,dx + N(y)\,dy = 0$$

dengan M(x) dan N(y) berturut-turut adalah fungsi dalam variabel x dan y. Persamaan diferensial di atas adalah persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Untuk mencari solusi umum persamaan diferensial seperti ini dapat dilakukan dengan cara mengintegralkan masing-masing suku dalam persamaan itu.

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = \int 0\,dx.$$

$$\int M(x)\,dx + \int N(y)\,dy = C,\ C \text{ konstan sebarang.}$$

Contoh:

a. Carilah solusi umum persamaan diferensial $2x\,dx + y\,dy = 0$.

   Jawab:

   $\int 2x\,dx + \int y\,dy = C_1$, C_1 konstan sebarang.

   $x^2 + \frac{1}{2}y^2 = C_2$, C_2 konstan sebarang.

   $2x^2 + y^2 = C$, C konstan sebarang.

b. Carilah solusi umum persamaan $\frac{dy}{dx} = 2xy$.

   Jawab:

   $\frac{dy}{y} = 2x\,dx$ jika dan hanya jika $\frac{dy}{y} - 2x\,dx = 0$.

   $\int \frac{dy}{y} - \int 2x\,dx = \int 0\,dx.$

   $\ln y - x^2 = C$ atau $\ln y = x^2 + C$, C konstan sebarang.

c. Carilah solusi umum persamaan diferensial $xy\,dx – (x^2 + 1)\,dy = 0$.

   Jawab:

   Persamaan diferensial dapat ditulis dalam bentuk

   $\frac{x}{x^2+1}\,dx - \frac{1}{y}\,dy = 0.$

   Solusi persamaan diferensial ini adalah:

   $\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - \int \frac{1}{y}\,dy = C_1$, C_1 konstan sebarang

½ ln (x^2 + 1) – ln y = ln C, C konstan sebarang

ln y = ln $\sqrt{x^2+1}$ + ln C.

ln y = ln C$\sqrt{x^2+1}$.

y = C$\sqrt{x^2+1}$

Soal

Untuk nomor 1 sampai 8, carilah solusi umumnya.

1. x dy – (y + 1) dx = 0
2. 4x dy – y dx = x^2 dy
3. x^2(y + 1) dx + y^2(x – 1) dy = 0
4. x^3 dy - x^3 dx = dx
5. x(y^2 - 1) dx – y (x^2 - 1) dy = 0
6. xy (1 + y^2) dx - y^2(1 + x^2) dy = 0
7. (x^2 - x)y' = y^2 - y
8. e^x cos y dx + (1 + e^x) sin y dy = 0.
9. Selesaikan masalah nilai awal berikut
   a. $\frac{dy}{dx}$ + xy = x, y(1) = 2.
   b. y, - 2y = 1, y(1) = 2.
   c. $\frac{dN}{dt}$ - kN = 0, k > 0, N(0) = M.
   d. $\frac{dP}{dt}$ + P = Pte^t, P(0) = 1.

b. Persamaan Diferensial Bentuk $f(\frac{y}{x})\,dx + g(\frac{y}{x})\,dy = 0$.

Terdapat berbagai bentuk persamaan diferensial orde-1. Misalnya terdapat persamaan diferensial orde-1 yang dapat ditulis dalam bentuk

$$f(\frac{y}{x})\,dx + g(\frac{y}{x})\,dy = 0. \tag{2.4}$$

Persamaan deferensial (2.4) dapat diselesaikan dengan cara subtitusi,

$$u = \frac{y}{x} \text{ atau } y = ux$$

$$dy = u\,dx + x\,du.$$

Dengan cara seperti ini persamaan diferensial (2.4) bentuknya akan berubah menjadi persamaan diferensial dengan variabel terpisah.

Contoh:

a. Carilah solusi persamaan diferensial

$$(2ye^{\frac{y}{x}} - x)\,y' + 2x + y = 0. \tag{2.5}$$

Jawab:

Persamaan diferensial (2.5) dapat diubah dalam bentuk

$$f(\frac{y}{x})\,dx + g(\frac{y}{x})\,dy = 0,$$

yakni

$$(2\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}} - 1)\,dy + (2 + \frac{y}{x})\,dx = 0,$$

dengan subtitusi $u = \frac{y}{x}$ atau $y = ux$, diperoleh $dy = u\,dx + x\,du$, dan

$$(2ue^{u} - 1)(u\,dx + x\,du) + (2 + u)\,dx = 0.$$

$$(2u^2e^{u} - u + 2 + u)\,dx + x(2ue^{u} - 1)\,du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \frac{2ue^{u} - 1}{2u^2e^{u} + 2}\,du = 0. \tag{2.6}$$

Persamaan diferensial (2.6) merupakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan (2.6), didapat

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{2ue^u - 1}{2u^2e^u + 2}\, du = C_1,\ C_1 \text{ konstan sebarang.}$$

$$\int \frac{dx}{x} + ½\int \frac{d(u^2e^u + 1)}{u^2e^u + 1}\, du - ½ \int du = C_1.$$

$$\ln x + ½ \ln (u^2 e^u + 1) – ½u = C_2,\ C_2 \text{ konstan sebarang.}$$

$$2 \ln x + \ln (u^2 e^u + 1) – \ln e^u = \ln C,\ C \text{ konstan sebarang.}$$

$$x^2 (u^2 e^u + 1) = C e^u.$$

Jadi solusi persamaan diferensial (2.5) adalah

$$y^2 e^{\frac{y}{x}} + x^2 = Ce^{\frac{y}{x}},\ C \text{ konstan sebarang.}$$

b. Carilah solusi persamaan diferensial

$$x \frac{dy}{dx} - y + x \cos^2 \frac{y}{x} = 0. \tag{2.7}$$

Jawab:

Persamaan diferensial (2.7) dapat diubah dalam bentuk

$$dy - \frac{y}{x}\, dx + \cos^2 \frac{y}{x}\, dx = 0. \tag{2.8}$$

Misalkan $\frac{y}{x}$ = u atau y = ux, diperoeh dy = u dx + x du.

Persamaan diferensial (2.8) menjadi:

$$(u\, dx + x\, du) – u\, dx + \cos^2 u\, dx = 0.$$

$$x\, du + \cos^2 u\, dx = 0.$$

$$\frac{du}{\cos^2 u} + \frac{dx}{x} = 0. \tag{2.9}$$

Persamaan diferensial (2.9) merupakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah. Integralkan kedua ruas persamaan (2.9), didapat

$$\int \frac{du}{\cos^2 u} + \int \frac{dx}{x} = C_1,\ C_1 \text{ konstan sebarang.}$$

$$\text{tg } u + \ln x = C_1$$

$$\ln e^{tg.u} + \ln x = \ln C,\ C \text{ konstan sebarang.}$$

Jadi solusi persamaan diferensial (2.7) adalah

$$xe^{tg.\frac{y}{x}} = C,\ C \text{ konstan sebarang.}$$

c. Persamaan Diferensial Bentuk $(ax + by + c)dx + (px + qy + r)\, dy = 0$

Perhatikan persamaan diferensial berbentuk

$$(ax + by + c)\, dx + (px + qy + r)\, dy = 0, \tag{2.10}$$

dengan a, b, c, p, q dan r bilangan-bilangan real. Persamaan diferensial (2.10) berorde-1 dan berderajat-1. Untuk mencari solusi persamaan diferensial (2.10) perhatikan kasus di bawah ini:

(1) Bila $c = 0$ dan $r = 0$,

maka bentuk persamaan diferensial tersebut menjadi

$$(ax + by)\, dx + (px + qy)\, dy = 0,$$

dan ini identik dengan

$$(a + b\frac{y}{x})\, dx + (p + q\frac{y}{x}) = 0.$$

Jadi persamaan persamaan diferensial ini berbentuk

$$f(\frac{y}{x})\, dx + g(\frac{y}{x})\, dy = 0,$$

yang cara mencari solusinya dapat dilakukan dengan cara seperti pada sub bab 2b.

(2) Jika $c \neq 0$ atau $r \neq 0$,

maka ada 3 kemungkinan atau kasus untuk mencari solusi persamaan diferensial (2.10).

a. Kasus1: $aq - bp \neq 0$.

Misalkan $u = ax + by + c$ dan $v = px + qy + r$

$$du = a\, dx + b\, dy \qquad dv = p\, dx + q\, dy$$

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp} \quad \text{dan} \quad dy = \frac{adv - pdu}{aq - bp}$$

Subtitusikan ke persamaan diferensial (2.10) akan menghasilkan persamaan diferensial berbentuk

$$f(\frac{y}{x})\, dx + g(\frac{y}{x})\, dy = 0,$$

selanjutnya solusinya dapat dicari dengan cara seperti pada sub bab 2b.

Contoh:

Carilah solusi persaman diferensial

$$(x + 2y + 1)\, dx + (x + y + 1)\, dy = 0. \qquad (2.11)$$

Jawab:

Pada persamaan diferensial (2.11) nilai-nilai a = 1, b = 2, c = 1, p = 1, q = 1 dan r = 1.

Diperiksa nilai aq – bp dan ternyata aq – bp = -1 atau aq – bp $\neq$ 0.

Untuk mencari solusi persamaan diferensial pada contoh ini, misalkan

$$u = x + 2y + 1 \quad \text{dan} \quad v = x + y + 1.$$

$$du = dx + 2\, dy \quad \text{dan} \quad dv = dx + dy.$$

$$dx = \frac{qdu - bdv}{aq - bp} = \frac{du - 2dv}{-1} = 2\, dv - du,$$

$$dy = \frac{adv - pdu}{aq - bp} = \frac{dv - du}{-1} = du - dv.$$

Subtitusikan ke persamaan diferensial, didapat:

$$u\, dx + v\, dy = 0.$$

$$u(2\, dv - du) + v\, (dv - du) = 0. \qquad (2.12)$$

Selanjutnya misalkan u = tv, didapat du = t dv + v dt, dan disubtitusikan ke persamaan diferensial (2.12), didapat

$$(2tv + v)\, dv - (tv + v)(t\, dv + v\, dt) = 0.$$

$$v(-t^2 + t + 1)\, dv - v^2 (t + 1)\, dt = 0.$$

$$\frac{1}{v}\, dv + \frac{t+1}{t^2 - t - 1}\, dt = 0. \qquad (2.13)$$

Persamaan (2.13) merupakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah, dan solusi persamaan diferensial (2.13) diperoleh dengan cara mengintegralkan.

Cara lain untuk mencari solusi persamaan diferensial bentuk (2.10) bila aq – bp $\neq$ 0 dapat dilakukan dengan cara sebagai berikut:

Reduksilah persamaan diferensial (2.10) ke bentuk persamaan diferensial

$$(au + bv)\, du + (pu + qv)\, dv = 0, \qquad (2.14)$$

dengan jalan memisalkan

$$x = u + k \text{ dan } y = v + l,$$

dengan x = k dan y = l adalah penyelesaian sistem persamaan linear

$$ax + by + c = 0,$$

$$px + qy + r = 0.$$

Selanjutnya carilah solusi persamaan diferensial (2.14).

b. Kasus 2: aq –bp = 0 dan $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$

Untuk mencari solusi persamaan diferensial (2.10) misalkanlah $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} =$ m, atau a = pm dan b = qm, dan disubtitusikan ke persamaan diferensial. Didapat:

$$(m(px + qy) + c)\ dx + (px + qy + r)\ dy = 0.$$

Selanjutnya misalkan u = px + qy, maka

$$du = p\ dx + q\ dy \quad \text{atau} \quad dy = \frac{du - pdx}{q}.$$

Subtitusikan ke persamaan diferensial (2.10), maka akan diperoleh persamaan diferensial dengan dalam bentuk variabel terpisah, selanjutnya solusi umumnya dapat diperoleh dengan cara seperti pada sub bab 2a.

Contoh:

Carilah solusi persamaan diferensial

$$(2x - 4y + 5)\ dy + (x - 2y + 3)\ dx = 0. \qquad (2.15)$$

Jawab:

Pada persamaan diferensial (2.15) nilai-nilai a = 2, b = -4, c = 5, p = 1, q = -2, dan r = 3.

Diperiksa nilai aq – bp dan ternyata aq – bp = -4 –(-4) = 0, dan berlaku hubungan $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$. Diambil m = 2, sebab $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$ = 2. Maka a = 2p dan b = 2q. Dengan mensubtitusikan nilai a dan b ini diperoleh persamaan diferensial

$$(2(x-2y) + 5)\ dy + (x - 2y + 3)\ dx = 0.$$

Sekarang misalkan u = x – 2y, maka du = dx – 2 dy, atau dy = $\frac{dx - du}{2}$.

Selanjutnya jika disubtitusikan ke persamaan diferensial didapat:

$$dx - \left(\frac{1}{2} - \frac{1/2}{4u + 11} \right) du = 0. \qquad (2.16)$$

Dan persamaan diferensial (2.16) adalah persamaan diferensial dengan variabel terpisah, solusi dapat dicari dengan cara mengintegralkan (2.16).

c. Jika aq –bp = 0 dan $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

Untuk mencari solusi persamaan diferensial (2.10) misalkanlah $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ = m, atau a = pm, b = qm dan c = rm, dan disubtitusikan ke persamaan diferensial. Didapat:

$$(m(px + qy + r) + c)\ dx + (px + qy + r)\ dy = 0$$

atau

$$m\ dx + dy = 0 \text{ (untuk } px + qy + r \neq 0).$$

Jadi solusi persamaan diferensial (2.10) adalah:

$$mx + y = 0.$$

Contoh:

Carilah solusi persamaan diferensial

$$(3x - 7y - 3)\ dx + (-6x + 14y + 6)\ dy = 0. \qquad (2.17)$$

Jawab:

Pada persamaan diferensial (2.17) nilai-nilai a = 3, b = -7, c = -3, p = -6, q = 14, dan r = 6.

Diperiksa nilai aq – bp dan ternyata aq – bp = -4 –(-4) = 0, dan berlaku hubungan $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$. Kita ambil m = - $\frac{1}{2}$, sebab $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$ = - $\frac{1}{2}$,

Maka a = - $\frac{1}{2}$p, b = - $\frac{1}{2}$q, dan c = - $\frac{1}{2}$r. Dengan mensubtitusikan nilai a, b, dan c ini diperoleh persamaan diferensial

$$dx - 2\,dy = 0 \quad (\text{untuk } 3x - 7y - 3 \neq 0)$$

dan solusinya adalah

$$x - 2y = C, \text{ C konstan sebarang..}$$

Soal

Carilah solusi persamaan diferensial berikut:

1. $(x - y + 3)\,dx + (3x - 2y + 2)\,dy = 0$
2. $(4y - x - 1)\,dx + (x - y - 1)\,dy = 0$
3. $(5x + 4y + 1)\,dx + (4x + 3y + 2)\,dy = 0$
4. $(3x + 3y - 4)\,dx + (x + y)\,dy = 0$
5. $(- x - x - 1)\,dx + (x + y)\,dy = 0$
6. $(x + y)\,dx + (7x + 7y - 5)\,dy = 0$
7. $(6x + 3y - 3)\,dy + (2x + y - 1)\,dx = 0$
8. $(10x - 15y + 5)\,dx + (2x - 3y + 1)\,dy = 0$
9. $(20x + 12y + 4)\,dy + (5x \;\; + 3x + 1)\,dx = 0$
10. $(4x + 2y)\,dx + (3x - 5y + 6)\,dy = 0$
11. $(3x + 4y)\,dy + (6x + 3y)\,dx = 0$
12. $(7x - 2y + 3)\,dx + (4x - 5y - 7)\,dy = 0.$

d. Persamaan Diferensial Eksak

Di bidang fisika dikenal fungsi potensial (*potential function*) $\phi(x,y)$ yang melibatkan dua variabel x dan y. Untuk suatu konstan C, kurva bertingkat (*level curves*)

$$\phi(x,y) = C$$

menyatakan titik-titik di bidang-xy yang memiliki potensial sama C. Berkaitan dengan persamaan diferensial, diferensial total (*total differential*) fungsi $\phi(x,y)$ adalah

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dy \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.18)$$

Asumsikan memiliki kurva bertingkat dari fungsi potensial $\phi(x,y)$ yang disajikan oleh

$$\phi(x,y) = C \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.19)$$

dengan diferensial totalnya $d\phi = 0$, atau persamaan (2.18) menjadi

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}\, dx + \frac{\partial \phi}{\partial y}\, dy = 0.$$

Kurva ekuipotensial (*equipotential curves*) dari $\phi(x,y)$ didefinisikan sebagai $\frac{dy}{dx}$,

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\frac{\partial \phi}{\partial x}}{\frac{\partial \phi}{\partial y}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.20)$$

tentu saja persamaan (2.20) memerlukan syarat $\frac{\partial \phi}{\partial y} \neq 0$. Sekarang diasumsikan turunan parsial $\frac{\partial \phi}{\partial x}$ dan $\frac{\partial \phi}{\partial y}$ ada, dan ini merupakan fungsi dalam x dan y. Sehingga persamaan (2.20) dapat ditulis dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} = g(x,y) \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (2.21)$$

dengan g(x,y) merupakan fungsi dalam x dan y.

Orang sering berhadapan dengan masalah bila diberikan laju perubahan suatu fungsi bagaimanakah mencari fungsinya? Masalah yang muncul adalah:

bila diberikan persamaan diferensial (2.21), dapatkah dicari solusi implisit dalam bentuk persamaan (2.19)? Sebelum membahas dan mencari pemecahan masalah ini lebih jauh, perhatikan contoh berikut.

Bila diberikan kurva bertingkat dari suatu potensial fungsi

$$\phi(x,y) = x^3 + 2x^2y + y^2 = C,$$

maka diferensial totalnya

$$d\phi = (3x^2 + 4xy)\, dx + (2x^2 + 2y)\, dy = 0.$$

Kurva ekuipotensial dari $\phi(x,y)$ adalah persamaan diferensial:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 4xy}{2x^2 + 2y}.$$

Sekarang bila sebaliknya, pertama-tama diketahui persamaan diferensial berbentuk

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 4xy}{2x^2 + 2y}$$

maka solusi implisitnya adalah

$$x^3 + 2x^2y + y^2 = C, \text{ C konstan sebarang.}$$

Misalkan $\mu(x,y)$ suatu fungsi dalam dua variabel sehingga μ memiliki turunan parsial pertama yang kontinu pada suatu domain D. Diferensial total $d\mu$ dari fungsi μ didefinisikan dengan

$$d\mu(x,y) = \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x}\, dx + \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y}\, dy$$

untuk semua $(x,y) \in D$.

Pernyataan

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy \qquad (2.22)$$

disebut diferensial eksak (*exact differential*) pada domain D jika terdapat fungsi dengan dua variabel real μ sehingga pernyataan (2.22) sama dengan diferensial total $d\mu(x,y)$ untuk semua $(x,y) \in D$. Yakni, pernyataan (2.22) adalah suatu persamaan diferensial eksak jika terdapat fungsi μ sehingga

$$\frac{\partial\mu(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \text{ dan } \frac{\partial\mu(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

untuk semua $(x,y) \in D$. Bila $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy$ merupakan suatu diferensial eksak, maka persamaan diferensial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0 \qquad (2.23)$$

disebut suatu persamaan diferensial eksak (*exact differential equation*).

Bila pada persamaan (2.23), diambil $\frac{\partial \mu}{\partial x} = M(x,y)$ dan $\frac{\partial \mu}{\partial y} = N(x,y)$ dan berturut-turut diturunkan terhadap y dan x, maka diperoleh syarat perlu agar persamaan diferensial (2.23) eksak, yakni

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Sekarang diperhatikan persamaan diferensial

$$M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0,$$

dan definisikan fungsi

$$\mu(x,y) = \int M(x,y)\,dx + \rho(y). \qquad (2.24)$$

Maka

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx + \rho(y)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\int M(x,y)\,dx\right) + \rho'(y)$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial y} M(x,y)\,dx + \rho'(y)$$

$$= \int \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)\,dx + \rho'(y)$$

$$\rho'(y) = \frac{\partial \mu}{\partial y} - \int \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)\,dx.$$

$$\rho(y) = \int \left(\frac{\partial \mu}{\partial y} - \int \frac{\partial}{\partial x} N(x,y)\,dx\right) dy.$$

Selanjutnya $\rho(y)$ ini disubtitusikan ke (2.24) dan diperoleh $\mu(x,y)$. Solusi persamaan diferensial (2.23) adalah $\mu(x,y) = C$, dengan C konstan sebarang.

Contoh:

1. Carilah solusi persamaan diferensial

$$(2x + 3y - 2)dx + (3x - 4y + 1)dy = 0.$$

Jawab:

Pertama-tama diselidiki apakah persamaan diferensial ini eksak atau tidak.

$M(x,y) = 2x + 3y - 2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3$

$N(x,y) = 3x - 4y + 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3$, maka persamaan diferensial (pada contoh ini) eksak.

Tulis $\frac{\partial \mu}{\partial x} = M(x,y) = 2x + 3y - 2$

$$\mu = \mu(x,y) = \int (2x + 3y - 2)\, dx + \rho(y)$$

$$= x^2 + 3xy - 2x + \rho(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 3x + \rho'(y) = 3x - 4y + 1$$

Didapat $\rho'(y) = -4y + 1$, dan berarti

$$\rho(y) = -2y^2 + y.$$

Jadi solusi persamaan diferensial eksak $(2x + 3y - 2)dx + (3x - 4y + 1)dy = 0$, adalah

$$\mu(x,y) = C, .$$

$$(x^2 + 3xy - 2x) + (-2y^2 + y) = C,$$

$$x^2 + 3xy - 2x - 2y^2 + y = C, \text{ C konstan sebarang.}$$

2. Carilah solusi persamaan diferensial

$$(2x^3 + 3y)\, dx + (3x + y - 1)\, dy = 0.$$

Jawab:

Pertama-tama diselidiki apakah persamaan diferensial ini eksak atau tidak.

$M(x,y) = 2x^3 + 3y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial M}{\partial y} = 3$

$N(x,y) = 3x + y - 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 3$

Karena $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} = 3$, maka persamaan diferensial eksak.

Tulis $\frac{\partial \mu}{\partial y} = 3x + y - 1$

$\mu = \mu(x,y) = \int (3x + y - 1)\, dy + \rho(x)$

$= 3xy + ½y^2 - y + \rho(x)$

$\frac{\partial \mu}{\partial x} = 3y + \rho'(x) = 2x^3 + 3y$

Diperoleh $\rho'(x) = 2x^3$, dan berarti $\rho(y) = ½x^4$.

Jadi solusi persamaan diferensial eksak $(2x^3 + 3y)\, dx + (3x + y - 1)\, dy = 0$, adalah

$$\mu(x,y) = C_1,$$

$$(3xy + ½y^2 - y) + ½x^4 = C_1,\ C_1 \text{ konstan sebarang.}$$

$$x^4 + 6xy + y^2 - 2y = C,\ C \text{ konstan sebarang.}$$

3. Carilah solusi persamaan diferensial

$$y\, dx + (2x - ye^y)\, dy = 0.$$

Jawab:

Persamaan diferensial ini bukan persamaan diferensial eksak, sebab

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y) = 1 \text{ dan } \frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - ye^y) = 2.$$

Ternyata persamaan diferensial $y\, dx + (2x - ye^y)\, dy = 0$ tidak eksak. Apakah dapat diubah ke persamaan diferensial eksak? Ternyata dapat, yaitu dengan mengalikan kedua ruas persamaan dengan $\varphi = y$.

$$y^2\, dx + (2xy - y^2 e^y)\, dy = 0.$$

Persamaan ini diuji keeksakannya,

$$\frac{\partial}{\partial y} M(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(y^2) = 2y \text{ dan } \frac{\partial}{\partial x} N(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy - y^2 e^y) = 2y.$$

Karena persamaan diferensial eksak, solusinya dapat dicari dengan metode sebagaimana contoh 1 dan 2.

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = M(x,y) = y^2$$

$$\mu = \mu(x,y) = \int y^2 \, dx + \rho(y) = y^2 x + \rho(y)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} = 2yx + \rho'(y) = 2xy - y^2 e^y \text{ (kondisi keeksakan)}$$

$$\rho'(y) = - y^2 e^y .$$

Dengan integrasi bagian demi bagian diperoleh:

$$\rho(y) = - y^2 e^y + 2ye^y - 2e^y - \int 0. e^y \, dy$$

$$= - e^y (y^2 - 2y + 2)$$

Jadi solusi umum persamana diferensial y dx + (2x - ye^y) dy = 0 adalah

$$\mu(x,y) = C,$$

atau

$$y^2 x – e^y (y^2 - 2y + 2) = C, \text{ dengan C konstan sebarang.}$$

e. Faktor integrasi

Misalkan dipunyai persamaan diferensial berbentuk

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (2.25)$$

tetapi tidak eksak. Dapatkah persamaan (2.25) diubah menjadi persaman diferensial eksak? Sebagaimana pada contoh 3, orang kadang dapat mencari sebuah fungsi dari x dan y yang dapat merubah persamaan diferensial (2.25) yang semula tidak eksak menjadi eksak. Misalkan ada fungsi μ yang bila dikalikan dengan kedua ruas (2.25) merubah persamaan diferensial (2.25) menjadi persamaan diferensial eksak. Yakni diperoleh persamaan diferensial eksak:

$$\mu.P(x,y)dx + \mu.Q(x,y)dy = 0.$$

Jadi harus berlaku:

$$\frac{\partial \mu.P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial \mu.Q(x,y)}{\partial x}.$$

$$\mu. \frac{\partial P}{\partial y} + P. \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu.\frac{\partial Q}{\partial x} + Q. \frac{\partial \mu}{\partial x} \qquad (2.26)$$

Berdasarkan persamaan (2.26), fungsi μ ini kadang sulit dicari kecuali untuk fungsi dari satu variabel. Berikut ini hanya dibahas bila μ adalah fungsi dari variabel x saja; atau μ adalah fungsi dari variabel y saja.

a. Bila μ adalah fungsi dari variabel x saja.

Persamaan (2.26), menjadi

$$\mu.\ \frac{\partial P}{\partial y} = \mu.\frac{\partial Q}{\partial x} + Q.\ \frac{\partial \mu}{\partial x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}\ dx.$$

Bila g(x) = $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{Q}$, maka $\dfrac{d\mu}{\mu}$ = g(x) dx.

Diperoleh ln $\mu = \int$ g(x) dx.

Faktor integrasinya adalah $\mu = e^{\int g(x)dx}$.

a. Bila μ adalah fungsi dari variabel y saja.

Persamaan (2.26), menjadi

$$\mu.\ \frac{\partial P}{\partial y} + P.\ \frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu.\frac{\partial Q}{\partial x}$$

$$\frac{d\mu}{\mu} = -\ \frac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}\ dy.$$

Bila g(y) = $\dfrac{\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{P}$, maka $\dfrac{d\mu}{\mu}$ = - g(y) dy.

Diperoleh ln $\mu = -\int$ g(y) dy.

Faktor integrasinya adalah $\mu = e^{-\int g(y)dy}$.

Contoh

Carilah solusi persamaan diferensial:

$$(x^2 + y^2 + x)dx + xy\ dy = 0. \qquad (2.27)$$

Jawab:

Berdasarkan persamaan diferensial (2.27),

$P(x,y) = (x^2 + y^2 + x) \Rightarrow \dfrac{\partial P}{\partial y} = 2y.$

$Q(x,y) = xy \Rightarrow \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y.$

Karena $\dfrac{\partial P}{\partial y} \neq \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, maka persamaan diferensial (2.27) tidak eksak.

Untuk merubah persamaan diferensial (2.27) menjadi persamaan difererensial eksak, dicari faktor integrasinya: karena fungsi

$$g(x) = \frac{\dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x}}{Q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x},$$

merupakan fungsi dari x saja, maka faktor integrasinya adalah

$$\mu = e^{\int g(x)dx} = x.$$

Kedua ruas persamaan diferensial (2.27) dikalikan dengan x, berubah menjadi persamaan diferensial eksak:

$$x(x^2 + y^2 + x)dx + x^2 y\, dy = 0.$$

Selanjutnya solusi umumnya dapat dicari dengan metode mencari solusi persamaan diferensial eksak sebagaimana pada contoh-contoh yang telah diberikan (lihat contoh 1, 2 dan 3).

Soal.

Untuk nomor 1 sampai 7, carilah solusi persamaan diferensial berikut.

1. $(x^2 - y)\, dx - x\, dy = 0$
2. $(x + 2y^2)\, dx + (4xy + 3y^3)\, dy = 0$
3. $(3xy^2 - x^2)\, dx – (1 – 3x^2 y + 6y^2)\, dy = 0$
4. $(x – 2y)\, dx + (y^2 - 2x)\, dy = 0$
5. $(x^2 - 2xy)\, dy – (y^2 - 2xy + 1)\, dx = 0$
6. $(x \text{ coy } y - x^2)\, dy + (\sin y – 2xy + x^2)\, dx = 0$
7. $(e^y \sin x + y\, e^{-x})\, dx – (e^y + e^{-x} + e^y \cos x)\, dy = 0$

Untuk nomor 8 sampai 12, carilah solusi persamaan diferensial yang diberikan.

8. $2ty^3\ dt + 3t^2y^2\ dy = 0,\quad y(1) = 1$

9. $(2t\cos y + 3t^2y)\ dt + (t^3 - t^2\sin y - y)\ dy = 0,\quad y(0) = 2$

10. $(xy - y^2 + x)\ dx + \left(\frac{x^2}{2} - 2xy + y\right) dy = 0,\ y(1) = 1$

11. $(ye^x + y)\ dx + (e^x + x + y)\ dy = 0,\ y(0) = 1$

12. $(2y + e^{-x}\sin y)\ dy + (e^x + x + e^{-x}\cos y)\ dx = 0,\ y(0) = \frac{\pi}{2}$.

Untuk nomor 13 sampai 16, carilah solusi persamaan diferensial berikut.
(bila persamaan diferensial tidak eksak, ubah dulu ke bentuk eksak)

13. $dy + 2xy\ dx = x\ dx$

14. $(2y^2 + 3x)\ dx + 2xy\ dy = 0$

15. $x^2\ dy + xy\ dx = 2\ dx$

16. $(\frac{1}{2}y^2 + 2ye^x)\ dx + (y + e^x)\ dy = 0$

17. Tentukan fungsi M(x,y) agar persamaan diferensial berikut eksak:

$$M(x,y)\ dx + (x\sin y + \ln y - ye^x)\ dy = 0.$$

18. Apakah persamaan diferensial berikut eksak? Jika ya, carilah solusinya, jika tidak carilah faktor integrasinya, kemudian bentuklah persamaan diferensial eksaknya dan carilah solusinya.
    a. $(2yt^4 + 2yt^3 + t)\ dy + (y^2t^4e^t - y^2t^2 - 3y)\ dt = 0.$
    b. $(2y^3t^2 + 4y^2t + yt^4 + 2t)\ dy + 2(t^3 + y^2t + t)\ dt = 0$
    c. $(t^2\cos y - 3y^2t - e^y)\ dy + (2t\sin y - y^3 + \ln t)\ dt = 0$
    d. $(1 - yt)\ dy + (1 - t^2)\ dt = 0$
    e. $t^2\ dy + (yt + 1)\ dt = 0$

19. Carilah semua fungsi f(t) sehingga persamaan diferensial:

$$y^2\sin t\ dt + yf(t)\ dy = 0$$

merupakan persamaan diferensial eksak.

f. Persamaan Diferensial Linear Orde-1

Persamaan diferensial linear orde-1 adalah persamaan berbentuk

$$a_1(x)\, y'(x) + a_0(x)\, y(x) = b(x). \qquad (2.28)$$

dengan $a_1(x)$, $a_0(x)$, dan $b(x)$ hanya bergantung pada variabel x, tidak pada variabel y. Sebagai contoh persamaan-persamaan diferensial

$$2xy' - y = xe^{-x},$$

$$(x^2 + 1)y' + xy = x,$$

$$y' + (\text{tg } x)\, y = \cos^2 x,$$

semuanya adalah persamaan diferensial linear orde-1. Tetapi persamaan

$$y' - x^2 e^{-2y} = 0,$$

bukan persamaan diferensial linear.

Pada persamaan (2.28) diasumsikan $a_1(x)$, $a_0(x)$, dan $b(x)$ semuanya kontinu pada suatu interval dan $a_1(x) \neq 0$ pada interval tersebut. Persamaan deferensial (2.28) dapat diubah ke bentuk standar persamaan diferensial linear orde-1:

$$y' + P(x)y = Q(x),$$

dengan P(x) dan Q(x) kontinu pada suatu interval.

Cara mencari solusi persamaan diferensial linear orde-1 umumnya mengacu pada bentuk standar, maksudnya bila ada persamaan diferensial orde-1 tidak dalam bentuk standar diubah dulu menjadi bentuk $y' + P(x)y = Q(x)$, baru dicari solusinya.

Salah satu cara untuk mencari solusi persamaan diferensial bentuk

$$y' + P(x)y = Q(x), \qquad (2.29)$$

adalah dengan mengalikan kedua ruas persamaan (2.29) dengan suatu fungsi $\mu(x)$ sehingga ruas kiri persamaan sama dengan turunan perkalian μy, yaitu

$$\mu(x)[y' + P(x)y] = \frac{d}{dx}[\mu(x)y]$$

$$= \mu(x)y' + \mu'(x)y.$$

Permasalahannya adalah fungsi $\mu(x)$ belum diketahui, bagaimana mencarinya? Namun bila diperhatikan, dari persamaan

$$\mu(x)[y' + P(x)y] = \mu(x)y' + \mu'(x)y.$$

Maka fungsi $\mu(x)$ memenuhi hubungan

$$\mu(x)P(x)y = \mu'(x)y,$$

atau

$$\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = P(x).$$

Pada prosedur mencari solusi seperti ini hanya diperlukan sebuah fungsi $\mu(x)$, oleh karena itu dapat dipilih sebuah fungsi $\mu(x)$ yang positif. Dengan mengintegralkan kedua ruas persamaan diferensial didapat

$$\ln \mu(x) = \int P(x)\, dx,$$

atau

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx}.$$

Fungsi $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ ini merupakan faktor integrasi untuk persamaan diferensial linear orde-1 bentuk (2.29).

Sekarang bagaimana solusinya? Kalikanlah persamaan $y' + P(x)y = Q(x)$ dengan faktor integrasi $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$, diperoleh

$$\mu(x)(y' + P(x)y) = \mu(x)\, Q(x),$$

atau

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\, Q(x).$$

Integralkan kedua ruas persamaan ini, diperoleh

$$\mu(x)y = \int \mu(x)\, Q(x)\, dx + C, \text{ C konstan sebarang.}$$

Selanjutnya solusi persamaan (2.29) dapat ditulis secara eksplisit dengan membagi kedua ruas dengan faktor integrasi $\mu(x)$. Dengan menggunakan teorema dasar kalkulus dapat diperiksa bahwa y memenuhi persamaan diferensial (2.29).

Metode mencari solusi persamaan diferensial linear orde-1 satu memerlukan dua pengintegralan: (1) untuk menghasilkan faktor integrasi; dan (2) untuk memperoleh solusi umum y. Kedua integral ini dapat dilakukan karena diasumsikan keduanya P(x) dan Q(x) kontinu pada seluruh suatu interval. Ketika mencari faktor integrasi $\mu(x)$, tak melibatkan konstan integrasi sebab yang diperlukan hanyalah sebuah faktor integrasi dan tidak seluruh keluarga fungsi.

Persamaan diferensial linear memiliki peran yang cukup banyak baik secara teoritik maupun terapannya, namun bila kondisi awalnya diketahui apakah solusinya tunggal? Salah satu sifat utama solusi persamaan diferensial linear orde-1 adalah solusinya tunggal, dan sifat dinyatakan sebagai berikut.

Teorema (sifat keujudan dan ketunggalan solusi):
Misalkan P(x) dan Q(x) fungsi kontinu pada suatu interval (a,b), maka hanya ada satu fungsi y = y(x) yang memenuhi persamaan diferensial

$$y' + P(x)y = Q(x)$$

pada (a,b) dan kondisi awal $y(x_0) = y_0$, $x_0 \in (a,b)$.

Contoh:

1. Carilah solusi umum persamaan diferensial

$$xy' + y = e^{x},\ x > 0.$$

Jawab:

Tulis persamaan diferensial liear dalam bentuk standar

$$y' + \left(\frac{1}{x}\right) y = \left(\frac{1}{x}\right) e^{x}.$$

Jadi $P(x) = \left(\frac{1}{x}\right)$ dan $Q(x) = \left(\frac{1}{x}\right) e^{x}$.

Faktor integrasinya adalah

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{dx}{x}} = e^{\ln x} = x.$$

Kalikan kedua ruas persamaan diferensial dengan faktor integrasi, diperoleh

$$\mu(x)(y' + P(x)y) = \mu(x)\, Q(x),$$

atau

$$\frac{d}{dx}[\mu(x)y] = \mu(x)\, Q(x),$$

$$\mu(x)(y' + P(x)y) = \mu(x)\, Q(x),$$

atau

$$\frac{d}{dx}[xy] = x\left(\frac{1}{x}\right)e^x = e^x,$$

$$xy = \int e^x\,dx = e^x + C,$$

atau

$$y = \frac{e^x + C}{x},\ x > 0,\ \text{C konstan sebarang},$$

Untuk memeriksa apakah y ini solusi umum persamaan diferensial pada contoh ini, yakni $xy' + y = e^x$, $x > 0$, carilah turunan $y = \frac{e^x + C}{x}$, $x > 0$. Diperoleh

$$y' = \frac{-1}{x^2}(e^x + C) + \left(\frac{1}{x}\right)e^x.$$

Selanjutnya kedua ruas dikalikan x dan subtitusi $\frac{e^x + C}{x} = y$, diperoleh

$$xy' + y = x\left[\frac{-1}{x^2}(e^x + C) + \left(\frac{1}{x}\right)e^x\right] + \left(\frac{1}{x}\right)(e^x + C) = e^x.$$

Jadi persamaan diferensial dipenuhi oleh y.

2. Carilah solusi persamaan diferensial

$$y' + (\text{tg } x)y = \cos^2 x$$

pada interval $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Jawab:

Persamaan diferensial $y' + (\text{tg } x)y = \cos^2 x$ dalam bentuk standar dengan $P(x) = \text{tg } x$ dan $Q(x) = \cos^2 x$.

Faktor integrasinya adalah:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int tgx dx} = e^{-\ln|\cos x|} = \sec x,$$

karena $\cos x > 0$ pada seluruh interval $\frac{-\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Intergralkan $\mu(x)Q(x)$,

$$\int \mu(x)Q(x)\,dx = \int \sec x \cos^2 x\,dx = \sin x + C,\ \text{C konstan}$$

Solusi umumya adalah

$$(\sec x)y = \sin x + C,$$

atau

$$y = \sin x \cos x + C \cos x, \text{ C konstan sebarang.}$$

3. Carilah solusi persamaan diferensial

$$3xy' - y = \ln x + 1,\ x > 0$$

yang memenuhi y(1) = -2.

Jawab:

Tulis persamaan diferensial dalam bentuk standar

$$y' - \frac{1}{3x} y = \frac{(\ln x)+1}{3x}$$

Jadi $P(x) = \frac{1}{3x}$ dan $Q(x) = \frac{(\ln x)+1}{3x}$.

Faktor integrasinya

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int \frac{-dx}{3x}} = e^{\frac{-\ln x}{3}} = x^{\frac{-1}{3}}.$$

Jadi

$$x^{\frac{-1}{3}} y = \frac{1}{3} \int (\ln x + 1)\, x^{\frac{-4}{3}}\, dx.$$

Integral bagian demi bagian pada ruas kanan persamaan ini, menghasilkan

$$x^{\frac{-1}{3}} y = -x^{\frac{-1}{3}} (\ln x + 1) + \int x^{\frac{-4}{3}}\, dx. + C,$$

$$x^{\frac{-1}{3}} y = -x^{\frac{-1}{3}} (\ln x + 1) - 3x^{\frac{-1}{3}} + C.$$

$$y = -(\ln x + 4) + Cx^{\frac{1}{3}}, \text{ C konstan sebarang.}$$

Bila x = 1 dan y = 2 disubtitusikan pada solusi umum, memberikan nilai konstan C:

$$-2 = -(0 + 4) + C$$

$$C = 2.$$

$$y = 2x^{\frac{1}{3}} - \ln x - 4$$

solusi khusus persaman diferensial 3xy' – y = ln x + 1, x > 0, yang memenuhi kondisi awal y(1) = -2.

Soal

Untuk soal nomor 1 sampai 7, carilah solusi umum persamaan diferensial linear orde-1 yang diberikan, jika mungkin nyatakan interval yang membuat solusi umum tersebut berlaku (valid).

1. $y' + 2xy = x$.
2. $2y' - y = xe^{\frac{x}{2}}$.
3. $xy' + 2y = 1 - x^{-1}$.
4. $y' = y - e^{2x}$.
5. $x^2 \frac{dy}{dx} + xy = 2$.
6. $x^2 dy + xydx = (x-1)^2 dx$.
7. $dy + (e^{-x} - 4y)dx = 0$.

Untuk soal nomor 8 sampai 13, carilah solusi masalah nilai awal berikut.

8. $y' + 4y = 1$, $y(0) = 1$.
9. $xdy + (y - \cos x)dx = 0$, $y(\frac{\pi}{2}) = 0$.
10. $dy + (3x - xy + 2)dx = 0$, $y(2) = -1$.
11. $y' - y = \sin 2x$, $y(0) = 0$.
12. $xy' - 2y = 2x^4$, $y(2) = 8$.
13. $Y' - 3x^2 y = x^2$, $y(0) = 2$.
14. Perhatikan persamaan diferensial $y' + P(x)y = 0$ dengan P adalah suatu fungsi kontinu pada suatu interval real I.
    a. Tunjukkan jika f dan g keduanya adalah solusi persamaan ini, dan c_1, c_2 keduanya konstan sebarang, maka $c_1 f + c_2 g$ juga solusi persamaan ini.
    b. Perluas hasil (a), tunjukkan bahwa jika $f_1, f_2, \ldots, f_n$ adalah n solusi dari persamaan tersebut, dan $c_1, c_2, \ldots, c_n$ adalah n konstan sebarang, maka

    $$\sum_{k=1}^{n} c_k f_k$$

    juga solusi persamaan tersebut.

g. Persamaan diferensial Bernoulli dan Riccati

Persamaan diferensial

$$y' + P(x)y = Q(x)y^{n}, \qquad (2.30)$$

disebut persamaan diferensial Bernoulli. Bentuk persamaan ini pertama kali diperkenalkan oleh Jakob Bernoulli pada tahun 1695. Persamaan diferensial Bernoulli sangat mirip dengan bentuk persamaan diferensial linear orde-1 kecuali ruas kanan memuat faktor y^{n}. Jika n = 1, persamaan diferensial Bernoulli merupakan persamaan diferensial dengan variabel terpisah, bila n = 0 merupakan persamaan diferensial linear. Pada umumnya cara mencari solusi persamaan diferensial Bernoulli dengan cara mereduksi persamaan (2.30) ke dalam persamaan diferensial linear orde-1.

Perhatikan persamaan diferensial (2.30). Bila $n \neq 0$ dan $n \neq 1$, subtitusikan

$$v = y^{1-n}$$

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx},$$

ke persamaan (2,30), akan merubah persamaan diferensial Bernoulli (2.30) ke bentuk

$$\frac{dv}{dx} + (1 - n)P(x)v = (1-n)Q(x). \qquad (2.31)$$

Persamaan diferensial (2.31) merupakan persamaan diferensial linear orde-1 (dalam variabel v), dan dapat diselesaikan dengan metode sebagaimana subbab (f). Selanjutnya dengan mensubtitusikan $v = y^{1-n}$ pada solusi ini menghasilkan solusi dalam varibel semula yaitu x dan y.

Contoh:

Carilah solusi persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} - y = e^{-x}y^{2}. \qquad (2.31)$$

Jawab:

Pada persamaan diferensial (2.31) n = 2. Subtitusikan

$$v = y^{1-n} = y^{-1},$$

$$\frac{dv}{dx} = -y^{-2}\frac{dy}{dx} \text{ atau } \frac{dy}{dx} = -y^{2}\frac{dv}{dx} = -v^{-2}\frac{dv}{dx}.$$

Persamaan diferensial (2.31) menjadi persamaan diferensial linear orde-1 dalam bentuk standar (dalam variabel v):

$$\frac{dv}{dx} + v = -e^{-x}.$$

Faktor integrasinya:

$$\mu = e^{\int dx} = e^{x}.$$

Berarti

$$e^{x}v = -\int e^{x}\,e^{-x}\,dx + C,$$

$$= -x + C, \text{ C konstan sembarang.}$$

Subtitusikan $v = y^{-1}$ atau $y = \frac{1}{v}$ pada $e^{x}v = -x + C$ memberikan solusi umum persamaan diferensial (2.31):

$$y = \frac{e^{x}}{C - x}, \text{ C konstan sebarang.}$$

Persamaan diferensial tak linear dalam bentuk

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^{2} + R(x) \tag{2.32}$$

dikenal dengan persamaan diferensial Riccati. Nama ini untuk mengenang ahli matematika dan filsafat dari Itali Count Jacopo Francesco Riccati (1676 – 1754). Bila R(x) = 0 persamaan diferensial Riccati berbentuk persamaan diferensial Bernoulli dan bila Q(x) = 0 menjadi persamaan diferensial linear orde-1. Solusi persamaan diferensial (2.32) bergantung pada fungsi P(x), Q(x) dan R(x). Pada pembahasan ini akan disajikan cara mencari solusi persamaan diferensial (2.32) bila diketahui sebuah solusinya. Misalkan fungsi y_1 adalah salah sebuah fungsi yang memenuhi persamaan diferensial (2.32), maka untuk mencari solusi (2.32) dapat dilakukan dengan subtitusi

$$y = y_1 + \frac{1}{u} \text{ dengan } u = u(x),$$

$$y' = y_1' - \frac{1}{u^2}\, u',$$

ke persamaan (2.32) dan akan mentranformasi persamaan diferensial Riccati menjadi persamaan diferensial linear orde-1 dalam u, yakni:

$$y_1' - \frac{1}{u^2}\, u' + P.\,(y_1 + \frac{1}{u}) = Q.\,(y_1^{\,2} + \frac{2y_1}{u} + \frac{1}{u^2}) + R.$$

Karena y_1 solusi persamaan diferensial (2.32), maka

$$y_1' + P\, y_1 = Q\, y_1^{\,2} + R,$$

dan persamaan diferensial direduksi menjadi persamaan linear orde-1:

$$\frac{du}{dx} + [2\, y_1(x)Q(x) - P(x)]u = -\, Q(x).$$

Persamaan ini dapat dicari solusinya dengan cara sebagaimana pada subbab (f). Selanjutnya subtitusikan $u^{-1} = y - y_1$ ke solusi umum dan didapat solusi dalam variabel semula yaitu x dan y.

Contoh:

Carilah solusi persamaan diferensial

$$y' - \left(\frac{1}{x}\right) y = 1 - \left(\frac{1}{x^2}\right) y^2,\ x > 0. \qquad (2.33)$$

Jawab:

Persamaan diferensial (2.33) adalah persamaan diferensial Riccati dengan fungsi $P(x) = -\frac{1}{x}$, $Q(x) = -\frac{1}{x^2}$, dan $R(x) = 1$. Mudah diperiksa bahwa fungsi y_1

= x adalah sebuah solusi persamaan diferensial (2.33). Untuk mencari solusinya, subtitusikan

$$y = x + \frac{1}{u}$$

ke persamaan (2.33) dan menghasilkan persamaan diferensial linear orde-1

$$\frac{du}{dx} + [2x(-\frac{1}{x^2}) - (-\frac{1}{x})]u = \frac{1}{x^2}$$

atau

$$\frac{du}{dx} - (\frac{1}{x})u = \frac{1}{x^2}.$$

Faktor integrasi:

$$\mu = e^{\int -\frac{dx}{x}} = e^{-\ln x} = x^{-1}.$$

Jadi

$$x^{-1}u = \int x^{-1}(\frac{1}{x^2})\,dx = -\frac{1}{2x^2} + C, \text{ C konstan sebarang.}$$

Dengan operasi aljabar diperoleh

$$\frac{1}{u} = \frac{2x}{2Cx^2 - 1}$$

Akhirnya dengan mensubtitusi $u^{-1} = y - x$, diperoleh solusi dalam variabel x dan y , yakni

$$y = x + \frac{2x}{2Cx^2 - 1}, \text{ C konstan sebarang.}$$

Soal

Untuk soal nomor 1 sampai 5, carilah solusi persamaan diferensial Bernoulli:

1. $y' - y = -y^2$
2. $y' - y = x y^2$
3. $x^2 y' + 2xy = y^3$, $x > 0$
4. $xy' + y = y^{-2}$, $x > 0$
5. $y' = 2y - e^x y^2$

Untuk soal nomor 6 sampai 10, carilah solusi persamaan diferensial Riccati:

6. $y' + 2y + y^2 = 0$, $y_1 = -2$
7. $y' = x y^2 + (1-2x)y + x - 1$, $y_1 = 1$
8. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 (y-x)^2 + \dfrac{y}{x}$, $y_1 = x$, $x > 0$
9. $\dfrac{dy}{dx} = x^3 + \dfrac{2y}{x} - \dfrac{y^2}{x}$, $y_1 = -x^2$, $x > 0$
10. $\dfrac{dy}{dx} = 1 + \dfrac{y}{x} - \dfrac{y^2}{x^2}$, $y_1 = x$, $x > 0$
11. Periksalah apakah persamaan diferensial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 2xy + x^2 + 1$$

merupakan persamaan diferensial Riccati? Apakah $y = x$ salah satu solusinya? Carilah solusi persamaan diferensial ini bila diketahui $y(0) = 5$.

12. Perhatikan persamaan diferensial Riccati

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x). \qquad \text{(A)}$$

a. Tunjukkan jika $A(x) = 0$ untuk semua x, maka persamaan (A) merupakan linear, dan bila $C(x) = 0$ untuk semua x, maka persamaan (A) merupakan persamaan Bernoulli.

b. Tunjukkan jika f sebarang solusi dari persamaan (A), maka transformasi

$$y = f + \frac{1}{v},$$

mereduksi (A) ke bentuk persamaan linear dalam v.

13. Bentuk umum persamaan diferensial Clairaut adalah

$$y = xy' + f(y').$$

(Sebutan Clairaut untuk mengenang matematikawan Perancis Alexis Claude Clairaut (1713 – 1765)).

a. Tunjukkan untuk setiap konstan k sehingga f(k) terdefinisi, persamaan garis $y = kx + f(k)$ adalah sebuah solusi persamaan diferensial Clairaut.

b. Pergunakan hasil a) untuk menyelesaikan persamaan diferensial

$$y = xy' + (y')^2.$$

c. Tunjukkan bahwa $y = -\dfrac{x^2}{4}$ juga solusi persamaan diferensial b), tetapi tidak diperoleh dengan memilih k.

14. Perhatikan persamaan diferensial

$$y = xy' + \tfrac{1}{2}(y')^2. \qquad \text{(B)}$$

(Persamaan (B) adalah persamaan diferensial Clairaut).

a. Tunjukkan bahwa keluarga garis lurus $y = Cx + \tfrac{1}{2}C^2$, C konstan, adalah penyelesaian persamaan (B).

b. Tunjukkan bahwa $y = -\dfrac{x^2}{2}$ juga solusi dari persamaan (B).

BAB 3

APLIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE-1

a. Gejala atau fenomena alam: model matematika sederhana

Salah satu kemampuan manusia yang cukup bermakna adalah kemampuan mengembangkan Ilmu pengetahuan dan teknologi. Kemampuan ini tidak lepas dari kemampuan manusia dalam memperoleh pengetahuan dengan cara mengamati gejala atau fenomena alam dan memprediksi kemungkinan-kemungkinan kebutuhan manusia di masa kini dan mendatang sebagai landasan untuk mengembangkannya.

Metode memperoleh dan mengembangkan ilmu pengetahuan dan teknologi secara empirik melalui pengalaman dan pengamatan menjadi pilihan yang tepat dewasa ini. Apalagi dengan didukung dengan produk teknologi canggih seperti kalkulator, komputer dan sebagainya. Dengan demikian matematika terapan (*applied mathematics*) perlu mendapat perhatian dan dikenalkan sejak dini pada para mahasiswa. Fokus matematika terapan adalah untuk memecahkan masalah-masalah kehidupan sehari-hari. Salah satu kesulitan dalam mempelajari dan mengembangkan matematika terapan adalah ketika menterjemahkan masalah-masalah yang berkaitan dengan gejala atau fenomena alam kedalam bahasa matematika (pemodelan matematika).

Berkaitan dengan gejala atau fenomena alam, orang sering memerlukan model matematik dari masalah yang dihadapi. Banyak permasalahan matematik dari gejala alam yang model matematikanya dapat diformulasikan dalam bentuk persamaan diferensial orde-1. Selanjutnya dari model matematik yang diperoleh ini solusinya dicari dengan metode yang sesuai. Sampai saat ini belum ditemukan cara terbaik agar menjadi pakar dalam menyusun model matematika. Kendalanya adalah dalam menyusun model matematika fenomena baru (*new phenomena*) bersifat tak rutin, kasusistik dan sering melibatkan beberapa variabel, dan karena itu agar dapat menyusun model matematika suatu gejala alam diperlukan dasar pengetahuan dan kemampuan yang lebih kompleks. Salah satu cara mempelajari menyusun model matematika ini dengan mengkaji contoh-contoh penyusunan model matematik yang sudah ditemukan orang.

b. Keradioaktifan suatu zat: model peluruhan

Berdasarkan Bab 1 bagian (f) 3, model peluruhan zat radioaktif diberikan oleh persamaan diferensial

$$\frac{dN}{dt} = -kN. \tag{3.1}$$

dengan k > 0 adalah konstan peluruhan. Persamaan diferensial (3.1) menyatakan bahwa peluruhan zat radio aktif pada saat t berbanding langsung dengan banyaknya atom zat pada waktu itu. Solusi persamaan diferensial (3.1) dapat dicari dengan cara berikut. Ubah bentuk persamaan (3.1) menjadi

$$\frac{dN}{N} = -k\,dt.$$

Integralkan kedua ruas diperoleh

$$\ln|N| = -kt + C_1,\ C_1 \text{ konstan sebarang.}$$

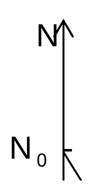
Karena N > 0, maka ln |N| = ln N, jadi solusi persamaan diferensial ini adalah:

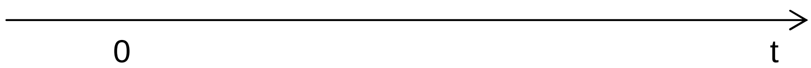
$$N = e^{-kt+C_1} = Ce^{-kt},\ C \text{ konstan sebarang.}$$

Misalkan pada saat t = 0, N(0) = N_0 adalah banyaknya atom awal (mula-mula) zat radio aktif, maka C = N_0. Jadi bila kondisi awal persamaan diferensial (3.1) adalah N(0) = N_0, maka solusi khususnya adalah

$$N = N_0 e^{-kt}.$$

Grafik solusi ini sebagai berikut:





Gambar 1: Grafik N(t) = $N_0 e^{-kt}$.

c. Perkembangan populasi: model pertumbuhan

Masalah pertumbuhan populasi, menurut Thomas Malthus (1766-1834) model persamaan diferensialnya:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

dengan k adalah koefien pertumbuhan yang merupakan selisih rata-rata kelahiran dan kematian. Dengan metode seperti pada masalah keradioaktifan suatu zat, solusi umum persamaan diferensial ini adalah:

$$P = Ce^{kt}.$$

Bila kondisi awalnya P(0) = P_0, maka diperoleh solusi khusus:

$$P = P_0 e^{kt}.$$

Persamaan diferensial yang dikemukakan Thomas Malthus ini merupakan model pertumbuhan populasi yang paling sederhana yakni dengan mengasumsikan bahwa persediaan sumber makanan tak terbatas, dan hanya mempertimbangkan faktor rata-rata kelahiran dan kematian. Pierre-Fancois Verhulst (1804-1849) berdasar pada model pertumbuhan populasi Malthus mengemukakan model matematik yang dinamakan model pertumbuhan logistik

$$\frac{dP}{dt} = rMP - rP^2.$$

dengan mengambil nilai k = r(M-P), dengan M adalah maksimal populasi yang dapat ditampung dan r suatu konstan. Dengan memisalkan a = rM dan b = r, persamaan diferensial dapat ditulis:

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2.$$

Persamaan diferensial ini merupakan persamaan diferensial dengan varibel terpisah. Misalnya kondisi awalnya $P(t_0) = P_0$. Solusi persamaan diferensial ini dapat dicari dengan cara berikut.

$$\int_{P_0}^{P} \frac{ds}{as - bs^2} = \int_{t_0}^{t} du = t - t_0,$$

(Misalkan s = P dan u = t, maka dP = ds dan du = dt).

Untuk mengintegralkan fungsi $\frac{1}{as - bs^2}$ dapat dilakukan dengan cara berikut:

$$\frac{1}{as - bs^2} = \frac{1}{s(a - bs)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs}$$

Maka ruas kanan persamaan dapat ditulis:

$$\frac{A}{s} + \frac{B}{a - bs} = \frac{A(a - bs) + Bs}{s(a - bs)} = \frac{Aa + (B - bA)s}{s(a - bs)}.$$

Jadi Aa + (B – bA)s = 1. Karena persamaan ini berlaku untuk semua s, maka berlaku juga untuk semua Aa = 1 dan B – bA = 0, dan didapat A = $\frac{1}{a}$ dan B = $\frac{b}{a}$.

$$\int_{P_0}^{P} \frac{ds}{as - bs^2} = \frac{1}{a} \int_{P_0}^{P} \left(\frac{1}{s} + \frac{b}{a - bs}\right) ds = \frac{1}{a}\left[\ln \frac{P}{P_0} + \ln \left| \frac{a - bP_0}{a - bP} \right|\right]$$

$$= \frac{1}{a}\left[\ln \frac{P}{P_0} \left| \frac{a - bP_0}{a - bP} \right|\right].$$

Jadi

$$t - t_0 = \frac{1}{a}\left[\ln \frac{P}{P_0} \left| \frac{a - bP_0}{a - bP} \right|\right].$$

Karena $\frac{a - bP_0}{a - bP}$ selalu bernilai positif, maka

$$a(t - t_0) = \ln \frac{P}{P_0} . \frac{a - bP_0}{a - bP}.$$

Dan

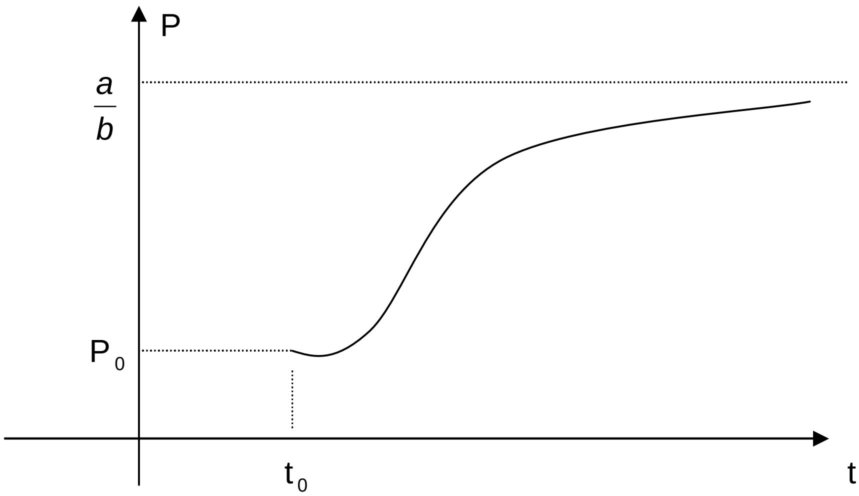
$$e^{a(t - t_0)} = \frac{P}{P_0} . \frac{a - bP_0}{a - bP},$$

$$[a - bP_0 + b P_0 e^{a(t - t_0)}]P(t) = a P_0 \; e^{a(t - t_0)}.$$

Jadi solusi khususnya adalah

$$P(t) = \frac{aP_0}{bP_0 + (a - bP_0)e^{-a(t-t_0)}}.$$

Grafik solusinya sebagai berikut.



Gambar 2: Grafik solusi model pertumbuhan logistik.

Soal

1. Misalkan N(t) banyaknya atom suatu sampel zat radioaktif pada saat t, dan konstan peluruhannya $\frac{-\ln 2}{(4,5).10^9}$. Misalkan pada saat t = 0 adalah waktu ketika sampel dibuat., carilah solusi khususnya.
2. Jika waktu paro (*half time*) radium-226 adalah 1600 tahun, berapa prosen radium=226 yang tersisa setelah 400 tahun?
3. Jika mula-mula terdapat 50 gram zat radioaktif dan setelah 2 minggu tinggal 30 gram, tinggal berapakah setelah 5 minggu?

4. Dalam percobaan perkembangan suatu bakteri, bakteri dimasukkan dalam suatu tabung. Laju pertambahan jumlah bakteri berbanding langsung dengan banyaknya bakteri pada saat itu.
   a. Carilah persamaan persamaan diferensial dan solusinya
   b. Jika dalam waktu 8 jam jumlah bakteri menjadi 2 kali lipat, berapakah jumlah bakteri pada waktu 10 jam?
   c. Jika terdapat 12 juta bakteridalam 4 jam dan 36 juta bakteri dalam 5 jam, berapakah jumlah bakteri mula-mula.
5. Populasi penduduk suatu negara menjadi 3 kali lipat dalam waktu 40 tahun. Menurut pertumbuhan polupasi Malthus, dalam waktu berapa tahun menjadi lipat 6?
6. Carilah solusi model logistik

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2$$

   untuk a = 0,03 dan b = $(1,6).10^{-4}$. (P(t) diukur dalam satuan juta).
7. Uang sebanyak M rupiah diinvestasikan di suatu perusahaan. Setiap bulan uang berkembang berbanding langsung dengan banyaknya uang waktu itu, bila faktor keproporsionalannya adalah r. Carilah persaman diferensial dan solusinya, serta gambarlah sket grafiknya. Berapakah jumlah uangnya setelah 1 tahun, bila r = 0,02?